BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

GENIE DES MATÉRIAUX
GENIE MECANIQUE B, C, D, E

MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures | Coefficient : 4

Séries STI

– Génie mécanique options :

Systèmes Motorisés (B), Structures Métalliques (C), Bois et Matériaux Associés (D), Matériaux Souples (E)

- Génie des Matériaux

Dès que le sujet vous est remis assurez vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.

Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Le sujet nécessite UNE feuille de papier millimétré.

Ce sujet comporte 3 pages (y compris celle-ci).

Exercice I (5 points)

1°) a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 6z + 12 = 0$.

b) Écrire les solutions de cette équation sous forme exponentielle.

2°) Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, placer les points A, B et I d'affixes respectives
$z_A = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ $\quad z_B = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ $\quad$ et $z_I = 2$.

a) Montrer que les points A, B et O sont sur un cercle de centre I dont on précisera le rayon.

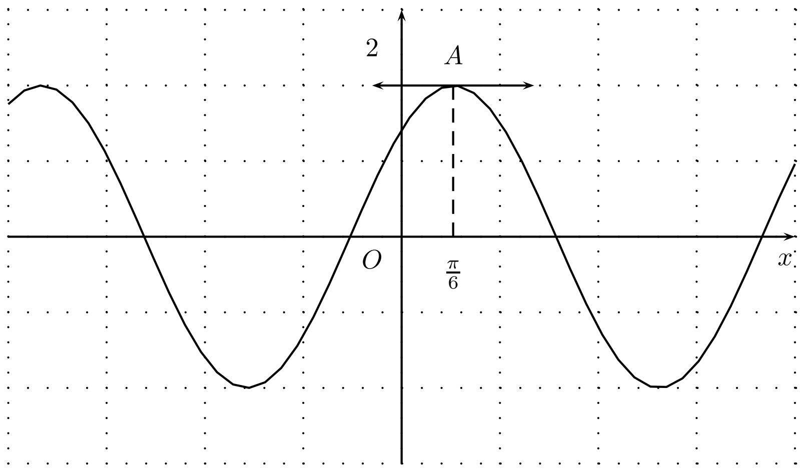
b) Donner, en le justifiant, la nature du triangle OAB.

c) Placer le point C d'affixe $z_c = -2\mathrm{i}\sqrt{3}$. Montrer que les points A, C et I sont alignés.

Exercice II (4 points)

1°) Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y'' + 9y = 0$.

2°) On désigne par f la solution particulière de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Il est précisé que la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{6}\,;\,2\right)$.
Déterminer une expression de $f(x)$.

3°) Montrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

4°) Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Interpréter graphiquement le résultat.

Problème (11 points)

Soit f la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 2 + (2 - x)\mathrm{e}^{2x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1°) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2°) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra poser $X = 2x$).

b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

c) Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Δ.

3°) a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (3 - 2x)\mathrm{e}^{2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

b) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,+\infty\right[$.

4°) a) Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b) Tracer Δ, $\mathscr{T}$ puis $\mathscr{C}$.

5°) Soit G la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par $G(x) = -\dfrac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{5}{4}\,\mathrm{e}^{2x}$.
Montrer que G est une primitive de la fonction g définie pour tout nombre réel x par $g(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{2x}$.

6°) a) Hachurer la partie $\mathscr{A}$ du plan limitée par $\mathscr{C}$, la droite d'équation $y = 2$ et les axes de coordonnées.

b) Calculer l'aire de $\mathscr{A}$. En donner la valeur exacte en unités d'aire.
Donner une valeur arrondie de cette aire, en cm^2, à 10^{-2} près.